به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۲

استقلال خطی، پایه، بعد و فضای برداری | **تمرین دوم** | تاریخ انتشار: ۶ آبان ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات تئوری (۱۰۰ + ۲۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۹ آبان ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۱۰ نمره) فرض کنید بردارهای v_1, v_2, v_3, v_4 در فضای V مستقل خطی هستند. ثابت کنید بردارهای زیر نیز مستقل خطی هستند:

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره) فرض کنید V یک فضای برداری متناهی بر روی اعداد حقیقی باشد. همچنین به‌ازای $m \geq 2$، مجموعه‌ی بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ در فضای V قرار دارند، به‌طوری که $\alpha_m \neq 0$. ثابت کنید بردارهای

$$\beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_m,\ \beta_2 = \alpha_2 + k_2\alpha_m,\ \ldots,\beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m$$

به‌ازای تمام مقادیر $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ مستقل خطی هستند، اگر و فقط اگر بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ متسقل خطی باشند.

پرسش ۳ (۱۰ نمره) فضای برداری زیر را در نظر بگیرید و خواص گفته شده را برای آن اثبات کنید:

Set: $C = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$

جمع برداری: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$

ضرب اسکالر: $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1)$

(آ) (۲ نمره)

Zero vector is: $\mathbf{0} = (-1, -1)$!

(ب) (۸ نمره)

$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (دقت کنید u, v بردار و α عدد اسکالر هستند.)

پرسش ۴ (۲۰ نمره) فرض کنید u, v, w سه بردار یکه در فضای ضرب داخلی حقیقی V باشند.

(آ) (۱۵ نمره) ثابت کنید:

$$2\langle u, v\rangle\langle u, w\rangle\langle v, w\rangle \geq \langle u, v\rangle^2 + \langle u, w\rangle^2 + \langle v, w\rangle^2 - 1$$

راهنمایی: اولین مرحله از روش Gram-Schmidt را روی بردارهای v و w نسبت به بردار u پیاده کنید. سپس از نامساوی کوشی‌ـ شوارتز روی جفت بردارهای به‌دست آمده استفاده کنید.

(ب) (۵ نمره) ثابت کنید در نامساوی قسمت قبل، حالت تساوی رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر بردارهای u, v, w وابسته خطی باشند.

پرسش ۵ (۲۰ نمره) فرض کنید $U_1, U_2, \ldots U_m$ زیرفضاهایی با بعد متناهی از V باشند، به‌طوری که $U_1 + \ldots U_m$، **Direct Sum** باشد. اثبات کنید بعد $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ متناهی است و :

$$dim\ (U_1 \oplus \cdots \oplus U_m) = dimU_1 + \cdots + dimU_m$$

پرسش ۶ (۲۰ نمره) فرض کنید U, W زیرفضاهایی از فضای برداری V با ابعاد متناهی باشد.

(آ) (۱۰ نمره) نشان دهید:

$$dim(U \cap W) = dimU + dimW - dim(U + W).$$

(ب) (۱۰ نمره) قرار دهید: $n = dimV$. اکنون نشان دهید اگر $k < n$، آنگاه همواره یک اشتراک از k زیرفضای با بعد $n-1$ وجود دارد که دارای بعد حداقل $n-k$ است.

پرسش ۷ (۲۰ نمره) فرض کنید $e_1, \dots e_n$ پایه‌های یکه متعامد فضای V بوده و $v_1, \dots v_n$ بردارهایی در V هستند، به‌طوری که به‌ازای هر j:

$$\|e_j - v_j\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ثابت کنید $v_1, \dots, v_n$ برای V پایه هستند.

سوالات عملی (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۹ آبان ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۵۰ نمره) در این پرسش شما باید برنامه‌ای بنویسید که با دریافت ورودی، مشخص کند که مجموعه بردارهای داده شده نسبت به هم مستقل هستند یا وابسته. در صورتی هم که نسبت به هم مستقلند نوع آن را (خطی یا افاین) مشخص کنید. توجه کنید که باید توابع مرتبط با این سوال توسط شما پیاده سازی شوند و **استفاده از توابع آماده ممنوع است.**

ورودی: در خط اول ورودی، n تعداد بردار های ورودی و m بعد بردارها داده می‌شود. در n خط بعدی نیز بردارهایی m بعدی به شما داده می‌شود.

خروجی: خروجی شما یکی از سه حالت زیر خواهد بود:

```
DEPENDENT
```

```
AFFINELY INDEPENDENT
```

```
LINEARLY INDEPENDENT
```

اگر بردارهای داده شده مستقل خطی بودند لازم به ذکر استقلال افاین آن‌ها نیست.

ورودی نمونه ۱

```
4 2
5 7
4 1
5 8
6 3
```

خروجی نمونه ۱

```
DEPENDENT
```

ورودی نمونه ۲

```
3 2
1 0
0 1
1 1
```

خروجی نمونه ۲

```
AFFINELY INDEPENDENT
```

ورودی نمونه ۳

```
2 2
5 1
3 5
```

خروجی نمونه ۳

```
LINEARLY INDEPENDENT
```

پرسش ۲ (۵۰ نمره) در این پرسش لازم است برنامه‌ای بنویسید تا با گرفتن ورودی، الگوریتم گرام‌ـاشمیت را پیاده سازی و نتیجه را در خروجی بدهد. لازم به ذکر است **استفاده از توابع آماده برای این سوال مجاز نیست** و لازم است تمامی توابع را خودتان پیاده‌سازی کنید.

ورودی: در خط اول ورودی، ابتدا تعداد بردارها (n) و بعد از آن بعد این بردارها (m) داده می‌شود. در n خط بعد هم بردارهایی با بعد m به شما داده می‌شود. تضمین می‌شود که بردارهای داده‌شده مستقل خطی هستند.

خروجی: در خروجی، بردارهای پایه‌ی عمود بر هم را چاپ کنید. (basis orthonormal vectors) نمایش سه رقم اعشار کافی است. ترتیب بردارها هم بدین صورت است که هر برداری که عنصر اول آن بزرگ‌تر بود باید اول چاپ شود (در صورت برابری عناصر اول هم عناصر بعد بردار ها را با هم مقایسه کنید و به همین ترتیب چاپ کنید).

ورودی نمونه ۱

```
3 3
0 3 4
1 0 1
1 1 3
```

خروجی نمونه ۱

```
0.857 -0.412 0.309
0.000 0.600 0.800
-0.514 -0.686 0.514
```